

# Chapitre 3- Transferts par convection

## I. Equations générales pour les transferts de chaleur dans les fluides

Les équations régissant les échanges thermiques par conduction, essentiellement loi de Fourier, équation de la chaleur, et diverses équations différentielle ou intégrale de bilan thermique, sont particulièrement rigoureuses et cadrées. Par exemple, les paramètres physiques descriptifs pertinents, à savoir, la conductivité thermique ainsi que la capacité calorifique (évaluée à pression constante) sont connus précisément. Ce sont des valeurs fixes, même si le plus souvent elles varient avec la température, mais ces grandeurs-là sont disponibles avec précision, à la fois pour les solides (isolants ou conducteurs), mais aussi pour les fluides (comme l'air et l'eau), cf. tables A1 à A10 rassemblées dans l'Annexe. Pour les transferts de chaleur par convection, l'équivalent de la loi de Fourier, est la loi dite de Newton qui lui ressemble beaucoup en apparence et qui s'écrit :

$$\phi = hS(T_s - T_\infty). \quad (3.1)$$

Par rapport à la loi de Fourier,  $\phi = -\lambda S(\partial\theta/\partial x)$ , les différences ne sautent pas aux yeux. On peut certes tout de suite noter que le rapport  $h\ell/\lambda$  (dit nombre de Biot) est sans dimension. Dans le cas d'un fluide pour lequel coexistent mécanisme de conduction et de convection, la quantité définie par ce rapport, porte le nom de nombre de Nusselt. Dans les deux cas, les nombres de Biot et de Nusselt, assurent la liaison entre conduction et convection à travers les lois de Fourier et de Newton respectivement. Des ordres de grandeur très approximatifs pour le coefficient de convection-rayonnement  $K$  (incluant la conductance  $h$ ) sont fournis dans le tableau 3.1.

Tableau 3.1	Configuration	Valeur de K
<b>Convection naturelle</b>	Air, gaz	5 à 50
<b>Convection forcée</b>	Air, gaz	10 à 500
	Eau	100 à 15000
	Huile	50 à 1500
	Métaux liquides	50 à 1500
<b>Ebullition</b>	Eau	5000 à 25000
	Liquides	2500 à 50000
<b>Condensation</b>	Vapeur d'eau	4000 à 50000
	Vapeur quelconque (condensation en gouttes)	50000 à 400000
	Vapeur quelconque (condensation en film)	400 à 10000

La différence majeure entre les deux expressions, et par voie de conséquence entre la conductivité thermique  $\lambda$  de la loi de Fourier, et la conductance thermique  $h$  de la loi de Newton, tient à ce que la conductance thermique, contrairement à la conductivité, est éminemment variable, dépendant d'un très grand nombre de paramètres. On peut citer, la vitesse d'écoulement du fluide  $U$ , sa masse volumique  $\rho$ , sa viscosité  $\mu$ , sa chaleur massique  $C_p$ , mais aussi sa conductivité thermique  $\lambda$ , de la géométrie et de la configuration retenue, de la nature de l'écoulement (laminaire ou turbulent, cf. Figure 3.1a & 3.1b), de la température, etc.

En bref, il n'existe pas de table fournissant des valeurs de la conductance  $h$ , comme celles présentées dans l'Annexe pour la conductivité  $\lambda$ , et chaque cas doit donc être étudié de manière séparée. Finalement l'équation (3.1) est particulièrement rudimentaire. Elle indique juste que le flux de chaleur transmis au fluide (ou fourni par lui selon les valeurs des températures) est proportionnel à ce fameux paramètre de conductance thermique  $h$ , à la surface d'échange  $S$  entre fluide et solide, ainsi qu'à la différence de température ( $T_s - T_\infty$ ) entre les deux. On comprend aisément les difficultés. Sachant que l'on considère les échanges thermiques en présence d'écoulement, il est bien clair que cet écoulement va venir influencer la manière dont la chaleur va pouvoir circuler et s'évacuer. Le paramètre de conductance thermique, sera par exemple fortement modifié en fonction de la vitesse du fluide, augmentant avec la vitesse moyenne. Il faut donc décrire les phénomènes en assurant un certain couplage entre l'équation du mouvement (c'est-à-dire l'équation de Navier-Stokes pour un fluide avec une certaine viscosité), et l'équation de la chaleur dite « généralisée » qui prend en compte un terme convectif associé au mouvement du fluide.

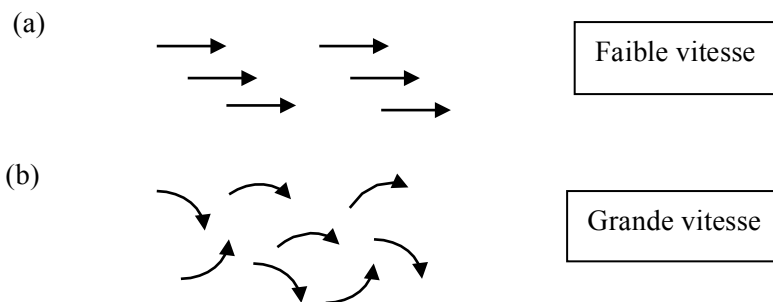


Figure 3.1 : Notion d'écoulement laminaire (a) pour une faible vitesse du fluide en mouvement ou bien turbulent (b) pour une vitesse plus grande du fluide.

Dans cette partie des rappels de cours, nous nous limiterons à décrire des problèmes à une ou deux dimensions. En effet, de nombreuses configurations qui relèvent de la convection forcée, se déroulent pour des géométries confinées. Par exemple, le cas d'une conduite cylindrique, avec un écoulement de liquide à l'intérieur, relève d'un problème à une dimension. Celui d'une ailette plane de refroidissement porte sur une

configuration à deux dimensions, etc. En bref, il ne sera pas utile ici d'attaquer des problèmes à 3 dimensions, et toutes les équations présentées le seront en deux dimensions.

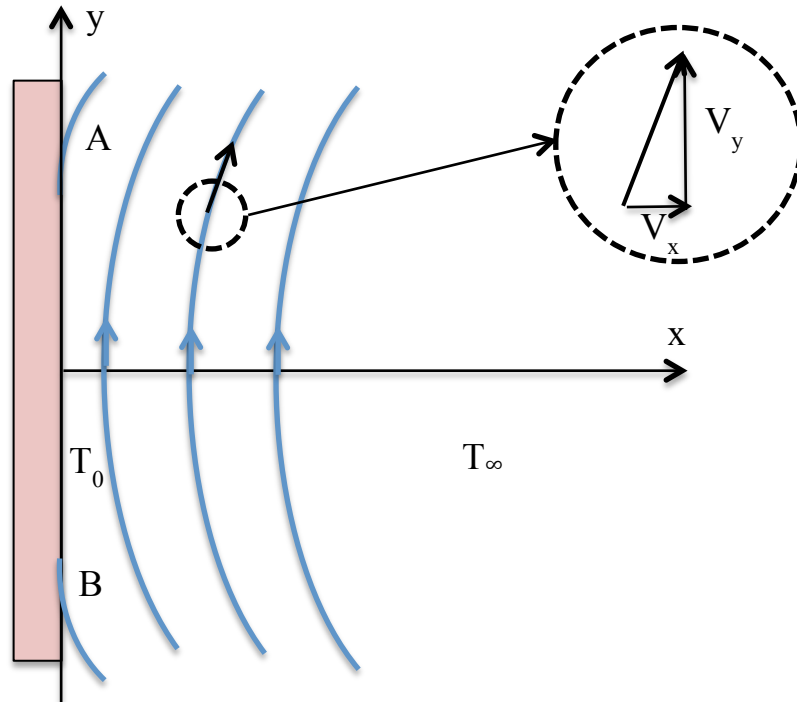


Figure 3.2 : Écoulement laminaire à deux dimensions d'un fluide chauffé par une plaque rectangulaire verticale.

Les équations fondamentales décrivant les transferts thermiques en convection forcée sont au nombre de trois : Equation de conservation de la masse, équation du mouvement (ou équation de Navier-Stokes), et équation de la chaleur généralisée. La Figure 3.2 décrit la géométrie 2D envisagée, pour un écoulement laminaire (les différents tracés correspondent aux lignes de champ).

Une plaque solide s'étend le long de l'axe  $Oy$ , à l'infini le long de cet axe mais aussi le long de l'axe  $Oz$  perpendiculaire au plan de la Figure. Le fluide s'écoule dans le demi-plan  $Ox$  (avec  $x > 0$ ). Les lignes de champ sont principalement orientées le long de l'axe  $Oy$ , même s'il existe aussi par endroits une composante de la vitesse le long de l'axe  $Ox$ . Les composantes de la vitesse le long de ces deux axes, sont notées  $V_x$  et  $V_y$ , respectivement, avec  $V_y \gg V_x$ . Les points notés  $A$  et  $B$  de la Figure sont respectivement un point de décollement et un point d'arrêt de la ligne de champ (trajectoire d'écoulement). La plaque est maintenue à la température  $T_0$ , alors que le fluide est à la température  $T_\infty$ , pour des valeurs de  $x$  suffisamment grandes, avec  $T_0 > T_\infty$ .

La première équation n'est donc rien d'autre que la relation de conservation de la masse. Normalement, elle s'écrit :  $d\rho/dt + \rho_0 \nabla \cdot \vec{V} = 0$ . En fait, elle sera écrite de manière beaucoup plus simple ici. Précisons d'ailleurs les hypothèses retenues :

- fluide lourd incompressible ;
- absence de force extérieure ;
- absence de forces de pression ;
- prise en compte d'une seule viscosité (ou tout du moins d'une viscosité globale) ;
- configuration à deux dimensions uniquement ;
- équation du mouvement de Navier-Stokes, écrite le long de l'écoulement.

Dans le cadre de ces hypothèses, l'équation de conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0. \quad (3.2)$$

Il s'agit d'une équation dite de continuité, qui assure simplement le lien entre les deux composantes du champ de vitesse, pour l'écoulement du fluide.

Pour l'équation de Navier-Stokes, repartons de son expression la plus générale, écrite ici sous sa forme avec les opérateurs vectoriels gradient, divergence et laplacien vectoriel :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\overrightarrow{\text{grad}} p + \left( \eta + \frac{\mu}{3} \right) \overrightarrow{\text{grad}} \text{div } \vec{V} + \mu \Delta \vec{V} + \rho \vec{F}_{ext}. \quad (3.3)$$

Cette équation peut aussi être réécrite en utilisant la relation vectorielle suivante :

$$\Delta \vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} \text{div } \vec{V} - \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}, \quad (3.4)$$

soit finalement pour l'équation de Navier-Stokes :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\overrightarrow{\text{grad}} p + \left( \eta + \frac{4\mu}{3} \right) \overrightarrow{\text{grad}} \text{div } \vec{V} - \mu \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} + \rho \vec{F}_{ext}. \quad (3.5)$$

Ces trois équations peuvent bien entendu être écrites sous une forme plus compacte et plus claire, à l'aide simplement de l'opérateur Nabla de dérivation spatiale sous des formes tout à fait équivalentes :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\vec{\nabla} p + \left( \eta + \frac{\mu}{3} \right) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) + \mu (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} + \rho \vec{F}_{ext}, \quad (3.6)$$

$$\Delta \vec{V} = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}), \quad (3.7)$$

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\vec{\nabla} p + \left( \eta + \frac{4\mu}{3} \right) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) - \mu \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}) + \rho \vec{F}_{ext}, \quad (3.8)$$

où le symbole  $\bullet$ , représente le produit scalaire et où  $\times$  représente le produit vectoriel.

En utilisant les hypothèses de départ (absence de forces de pression et absence de force extérieure), l'équation du mouvement (3.8) peut se ramener à une expression beaucoup plus simple, à savoir :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \left( \eta + \frac{4\mu}{3} \right) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \bullet \vec{V}) - \mu \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}). \quad (3.9)$$

Par ailleurs, le champ de vitesse sera évalué, comme cela a été expliqué un peu plus haut le long de l'axe de l'écoulement, c'est-à-dire le long de l'axe  $Oy$ . Il suffit donc ici de retranscrire l'équation (3.9) dans sa version à deux dimensions beaucoup plus simple, d'autant que pour un champ de vitesse laminaire le dernier terme de l'équation disparaît,  $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = 0$ . Il reste donc au final, après avoir regroupé les deux viscosités en un seul terme (noté  $\mu$ ) :

$$\rho \frac{dV_y}{dt} = \mu \left( \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} \right). \quad (3.10)$$

C'est cette forme à deux dimensions de l'équation du mouvement qui sera essentiellement utilisée dans le reste de l'ouvrage. Par contre, pour la convection libre, cf. section 3.6, il faudra venir rajouter un terme correspondant à la force ascensionnelle. Le second membre de l'équation (3.10) comporte deux termes. En fait et même si comme cela était noté plus haut,  $V_y \gg V_x$ , on a surtout ici :  $\partial^2 V_y / \partial x^2 \gg \partial^2 V_y / \partial y^2$ , si bien qu'il ne faut conserver que le premier terme et garder négligeable le second.

L'étape suivante consiste à utiliser la formulation de la dérivée particulaire. Il s'agit de noter que la quantité étudiée,  $V_y$ , est une fonction de plusieurs variables, à savoir :  $x$ ,  $y$  et  $t$ . Il est alors possible d'écrire la différentielle  $dV_y$  sous la forme suivante, en utilisant les règles de dérivation usuelles :

$$dV_y = \frac{\partial V_y}{\partial x} dx + \frac{\partial V_y}{\partial y} dy + \frac{\partial V_y}{\partial t} dt. \quad (3.11)$$

Si l'on divise tous les termes de cette équation par  $dt$ , et en notant :  $V_x = dx/dt$  ;  $V_y = dy/dt$ , alors on obtient formellement l'équation suivante :

$$\frac{dV_y}{dt} = \frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y}. \quad (3.12)$$

Cette dernière équation (3.12) fait donc le lien entre différentielle totale du champ de vitesse et différentielle partielle. De plus lorsque le régime est stationnaire, ce qui correspond à de très nombreuses applications en thermique de l'ingénieur, alors on note :  $\partial/\partial t \equiv 0$ . L'équation de Navier-Stokes sera donc finalement écrite sous la forme d'une équation aux dérivées partielles, non linéaire, que nous utiliserons tout le temps, et qui s'écrit ici finalement :

$$\rho \left( V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) = \mu \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2}. \quad (3.13)$$

La troisième et dernière équation que nous devons introduire ici est l'équation dite de la chaleur « généralisée ». Elle prend en compte la vitesse de l'écoulement du fluide. Pour l'établir, il faut repartir de l'équation de la chaleur, avec terme dépendant du temps :  $\lambda \Delta T = \rho C_p dT / dt$ , sans terme source et à deux dimensions :

$$\lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = \rho C_p \frac{dT}{dt}. \quad (3.14)$$

Ici encore, il faut noter que les variations latérales (le long de l'axe  $Ox$ ) de la température sont plus importantes que celles le long de la direction d'écoulement (axe  $Oy$ ), ce qui se traduit par l'inégalité forte :  $\partial^2 T / \partial x^2 \gg \partial^2 T / \partial y^2$ , ce qui justifie de négliger le deuxième terme du premier membre de l'équation (3.14). Sachant de plus que le champ de température  $T$  est une fonction de  $x$ ,  $y$  et  $t$ , il est alors possible d'effectuer un calcul similaire à celui qui vient d'être réalisé pour la vitesse, en écrivant :

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + V_x \frac{\partial T}{\partial x} + V_y \frac{\partial T}{\partial y}, \quad (3.15)$$

soit pour un régime stationnaire,  $\partial / \partial t \equiv 0$  :

$$\lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = \rho C_p \left( V_x \frac{\partial T}{\partial x} + V_y \frac{\partial T}{\partial y} \right), \quad (3.16)$$

soit en notant que :  $\partial^2 T / \partial x^2 \gg \partial^2 T / \partial y^2$ , il ne reste finalement plus que :

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \rho C_p \left( V_x \frac{\partial T}{\partial x} + V_y \frac{\partial T}{\partial y} \right). \quad (3.17)$$

L'équation (3.17) peut-être écrite d'une manière plus compacte, mettant en valeur le rôle de la vitesse du fluide, ainsi que l'influence du gradient du champ de température sous la forme suivante :

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \rho C_p \left( \vec{V} \cdot \vec{\nabla} T \right) = \rho C_p \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} T. \quad (3.18)$$

Les deux équations (3.13) et (3.17) sont centrales pour la suite des rappels de cours sur la convection. Il s'agit des équations à deux dimensions pour le mouvement du fluide (équation de Navier-Stokes simplifiée), et équation de la chaleur « généralisée ». Les deux ont exactement la même structure. Il s'agit d'équations aux dérivées partielles, non linéaires. En plus de ces deux équations de base, l'équation (3.2), ou équation de continuité (obtenue à partir de la relation de conservation de la masse pour un fluide non compressible), assure le passage d'une coordonnée du champ de vitesse vers l'autre, lorsque l'on a connaissance de l'une d'entre elles.

Les exercices 33 et 34 proposent quelques calculs complémentaires pour les distributions des champs de vitesses, et pour celles des températures pour des écoulements dans un tuyau.

## II. Couplage entre écoulement du fluide et transfert de chaleur

Finalement, il est possible de réécrire les deux équations de base (3.13) et (3.17) sous une forme un peu plus compacte encore, en notant :

$$V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} = \left( \frac{\mu}{\rho} \right) \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} = \nu \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2}, \quad (3.19)$$

avec :  $\nu = \mu / \rho$ , viscosité cinématique, et :

$$V_x \frac{\partial T}{\partial x} + V_y \frac{\partial T}{\partial y} = \left( \frac{\lambda}{\rho C_p} \right) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (3.20)$$

avec :  $\chi = \lambda / \rho C_p$ , diffusivité thermique.

Sous la forme des équations (3.19) et (3.20), la correspondance est parfaite, seuls les champs de température et de vitesse permutant, ainsi que les paramètres de viscosité cinématique et de diffusivité thermique. Dit en d'autres termes, ces deux équations ont exactement la même structure, ce qui permet de traiter très rapidement certains exercices basés sur l'équation aux dimensions (voir par exemple exercice 27), ainsi que la section 3.4 sur le sujet. Par ailleurs, sachant que la température est connectée à la vitesse du fluide par l'intermédiaire de l'équation (3.20) de la chaleur « généralisée », alors il est bien clair que dans l'équation du mouvement (3.19), même si elle n'apparaît pas explicitement, la vitesse du fluide sera en retour affectée par la distribution du champ de température.

## III. Description des applications classiques (plaque, tube, barreau, ailette)

Les applications classiques de la convection forcée en sciences de l'ingénieur touchent le plus souvent à des problèmes couplés, soit à une ou bien à deux dimensions, portant sur des géométries relativement simples, pour être ici en mesure de modéliser les phénomènes à un niveau élémentaire. Spécifiquement, nous allons aborder quatre grandes classes de problèmes classiques, à savoir :

- écoulement d'un fluide sur une surface plane à deux dimensions (I) ;
- écoulement d'un fluide caloporteur à l'intérieur d'un tube (II) ;
- échanges thermiques d'un fluide autour d'un barreau (III) ;
- échanges thermiques d'un fluide, et refroidissement des ailettes (IV).

La première classe d'applications (I) est constitutive de tout ce qui a été décrit jusqu'à présent. Il s'agit d'un problème à deux dimensions, par nature plus compliqué à résoudre que les trois classes d'applications qui suivent, qui sont toutes, ou du moins la plupart, des configurations à une dimension. Pour ce cas, nous avons bien noté que le champ de température réduit :  $\theta(x,y) = T(x,y) - T_\infty > 0$ , le long de l'axe latéral  $Ox$  aura un profil décroissant si la température en  $x=0$ , notée  $T_0$ , est supérieure à  $T_\infty$ , passant de  $\theta(0,y) = T_0 - T_\infty > 0$  sur la plaque, à  $\theta(x \gg 1, y) = T_\infty - T_\infty = 0$  loin de la plaque. Le profil de la composante  $V_y$  le long de l'axe  $Ox$  est une courbe en cloche dissymétrique. En  $x=0$ , par définition  $V_y = 0$ , puis elle passe par un maximum pour une certaine abscisse, avant de diminuer à nouveau, puis de tendre vers zéro suffisamment loin de la plaque (lorsque  $x \gg l$ ).

Dans le cadre de la deuxième classe d'applications (II), correspondant à l'écoulement d'un fluide caloporteur dans un tuyau, par exemple cylindrique, alors à la place du profil du champ de vitesse décrit par une courbe en cloche dissymétrique de l'application (I), on retrouvera un profil de Poiseuille parabolique et symétrique, comme il se doit. Les applications potentielles de ce deuxième cas sont innombrables, et plusieurs exercices ou problèmes seront proposés. On parle ici de systèmes de chauffage ou de climatisation.

La troisième classe d'applications (III) est canonique, dans le sens où il s'agit de configurations de base, correspondant à un barreau monté entre deux murs (ou deux thermostats, c'est-à-dire des solides de grands volumes ayant des températures fixes au cours du temps). Dans ce cas, c'est l'écoulement de l'air autour du barreau qui vient modifier par convection les résultats du profil de température en fonction de la coordonnée le long de l'axe du barreau, par rapport où cas où seul le mécanisme de conduction est pris en compte.

Enfin, la quatrième classe d'applications (IV) touche à la théorie des échanges thermiques dans les ailettes, qu'elles soient planes, cylindriques ou autres. Ici encore, les applications potentielles sont nombreuses, et il est important de bien savoir résoudre ce type de problèmes pour quelques configurations fondamentales.

## IV. Théorie de la similitude, nombres caractéristiques

C'est en 1883 qu'Osborne Reynolds (voir encadré) introduisit la loi de la similitude. Suite à des études expérimentales approfondies, O. Reynolds s'était rendu compte que la zone de transition entre régime laminaire et régime turbulent se produit toujours autour de  $R_e = 2200$ , avec :  $R_e = \ell U \rho / \mu$ . Dans cette définition,  $\ell$  est une dimension caractéristique (par exemple le rayon du tube),  $U$  la vitesse moyenne d'écoulement,  $\rho$  la masse volumique du fluide, et  $\mu$  sa viscosité.

Lorsque Reynolds changeait de fluide, venant ainsi modifier les paramètres de viscosité ou de masse volumique, ou bien le rayon du tuyau, alors quelle que soit la configuration, c'est toujours pour le nombre critique de Reynolds, c'est-à-dire pour la



valeur de 2200 environ que se produisait la transition entre régime laminaire et régime turbulent. De tels états différents par la nature du fluide ou la section des tuyaux aboutissant aux mêmes résultats en termes de nombre de Reynolds sont dits des états semblables. Dans le classique diagramme de Moody qui présente cette transition de manière universelle, on représente en général le logarithme de la perte de charge en fonction du logarithme du nombre de Reynolds (ou de la vitesse d'écoulement). En régime laminaire, dans cette représentation log-log, la pente est  $-1$ , alors que pour le régime turbulent, elle est plutôt située autour de  $-1/4$ . En fait, les résultats fins notamment sur les pentes dépendent aussi de la rugosité intérieure des tubes. Par contre, dans tous les cas, la transition critique existe bel et bien pour  $Re = 2200$  environ, et il s'agit d'une zone de discontinuité bien franche.

Comme indiqué plus haut, la conductance thermique  $h$  de la convection forcée doit a priori être affectée par la vitesse moyenne d'écoulement  $U$  du fluide concerné. Donc ce paramètre qui est aussi lié à la masse volumique du fluide  $\rho$  et à sa viscosité  $\mu$ , doit quelque part être lié au nombre de Reynolds. La question est alors de savoir si d'autres paramètres influent, et quelle relation fonctionnelle il est possible de construire. Sachant que tous les paramètres du modèle possèdent leur propre unité (ou dimension), à l'exception des nombres caractéristiques tels que Reynolds, Biot ou bien Nusselt, qui eux sont sans unité, l'idée est alors d'essayer de construire une relation fonctionnelle faisant intervenir tous les paramètres et toutes les grandeurs physiques associées aux deux équations fondamentales (3.19) et (3.20), ou bien (3.13) et (3.17). De manière exhaustive, il est alors possible d'écrire une telle relation fonctionnelle sous la forme :

$$h = cte \cdot l^a U^b \rho^c C_p^d \lambda^e \mu^f \quad (3.21)$$

Bien entendu, chaque grandeur possède une dimension particulière, et les exposants retenus ( $a, b, c, d, e, f$ ) de l'équation fonctionnelle doivent être compatibles entre eux. L'équation (3.21) en termes de dimensions (notées [ ] ) s'écrit :

$$\left[ \frac{H}{tL^2T} \right] = [L]^a \left[ \frac{L}{t} \right]^b \left[ \frac{M}{L^3} \right]^c \left[ \frac{H}{MT} \right]^d \left[ \frac{H}{tLT} \right]^e \left[ \frac{M}{Lt} \right]^f \quad (3.22)$$

où :  $[L]$ ,  $[M]$ ,  $[t]$ ,  $[H]$ ,  $[T]$ , représentent respectivement les dimensions d'une longueur, d'une masse, d'un temps, d'une quantité de chaleur, d'une température. Il ne reste alors plus qu'à écrire l'ensemble des équations dérivées de (3.22) pour chacune des unités (ou dimensions) de base. Sachant que :  $[h] = [H / tL^2T]$ , on obtient finalement :

$$* [L] \Rightarrow -2 = a + b - 3c - e - f \quad (3.23a)$$

$$* [M] \Rightarrow 0 = c - d + f \quad (3.23b)$$

$$* [t] \Rightarrow -1 = -b - e - f \quad (3.23c)$$

$$* [H] \Rightarrow +1 = d + e \quad (3.23d)$$

$$* [T] \Rightarrow -1 = -d - e \quad (3.23e)$$

Les deux équations (3.23d) et (3.23e) sont identiques. Cela n'est pas étonnant, car température et quantité de chaleur sont directement connectées par l'équation fondamentale de la calorimétrie. Cela signifie qu'il n'y a que quatre relations indépendantes pour six puissances inconnues. Il s'agit donc d'un système sous déterminé, et toutes les puissances s'exprimeront finalement en fonction de deux d'entre elles uniquement. Si l'on choisit de ne conserver que les deux derniers exposants  $e$  et  $f$ , alors les quatre équations fournissent dans l'ordre inversé de celui de la liste des équations (3.23), les relations suivantes :

$$(3.23d) \Rightarrow d = 1 - e ,$$

$$(3.23c) \Rightarrow b = 1 - e - f ,$$

$$(3.23b) \Rightarrow c = d - f = 1 - e - f ,$$

$$(3.23a) \Rightarrow 2 = -a - b + 3c + e + f = -a - 1 + e + f + 3 - 3e - 3f + e + f = -a + 2 - e - f ,$$

soit finalement :  $a = -e - f$ . Il ne reste plus alors qu'à retourner à l'équation fonctionnelle de départ (3.21) qui s'écrit finalement :

$$h = cte \cdot \ell^{-e-f} U^{1-e-f} \rho^{1-e-f} C_P^{1-e} \lambda^e \mu^f = cte \cdot \frac{\ell^{1-e-f} U^{1-e-f} \rho^{1-e-f}}{\mu^{1-e-f}} \cdot \frac{C_P^{1-e} \lambda^e \mu^{1-e}}{\ell^1}, \quad (3.24)$$

$$\Rightarrow \frac{h\ell}{\lambda} = cte \cdot \left( \frac{\ell U \rho}{\mu} \right)^{1-e-f} \cdot C_P^{1-e} \lambda^{e-1} \mu^{1-e} = cte \cdot \left( \frac{\ell U \rho}{\mu} \right)^{1-e-f} \cdot \left( \frac{C_P \mu}{\lambda} \right)^{1-e}, \quad (3.25)$$

soit finalement :  $N_u = cte (R_e)^\alpha \cdot (P_r)^\beta$ , avec :  $N_u = h\ell / \lambda$ , et où  $\alpha$ ,  $\beta$  sont des exposants arbitraires. Ce calcul peut être refait en choisissant un ordre différent et quelconque des exposants ( $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$ ,  $f$ ), ou bien en choisissant d'autres grandeurs pivots pour exprimer toutes les autres ( $a$  et  $b$  par exemple au lieu de  $e$  et  $f$ , ou bien toute autre paire arbitraire des exposants). A chaque tentative, ce sont exactement les mêmes résultats qui seront obtenus, c'est-à-dire une relation fonctionnelle universelle du type :

$$N_u = cte (R_e)^\alpha \cdot (P_r)^\beta, \text{ avec } \alpha, \beta, \text{ deux puissances arbitraires.} \quad (3.26)$$

La relation fonctionnelle de l'équation (3.26) est tout à fait générique. Selon les cas de l'écoulement laminaire ou turbulent, à la surface d'une plaque plane ou bien à l'intérieur d'un tuyau cylindrique, de très nombreuses autres relations ont pu être proposées. Très souvent, elles conservent l'allure générale de l'équation (3.26), avec des coefficients  $\alpha$  et  $\beta$ , qui prennent des valeurs différentes (toujours inférieures à l'unité), ainsi que des valeurs de la constante numérique devant l'expression qui change aussi. Les deux dernières Tables A11 et A12 de l'Annexe fournissent quelques unes de ces relations pour des cas types simples.

En résumé, la loi de Newton régit les échanges par convection. La convectance thermique  $h$  n'est pas une donnée intrinsèque, et elle dépend d'un très grand nombre de paramètres, cf. l'équation (3.21). La relation (3.26) permet de calculer pour un grand nombre de configurations différentes le nombre de Nusselt, en fonction du nombre de Reynolds et du nombre de Prandtl pour le fluide considéré. Il est alors possible d'évaluer la convectance thermique  $h$ , à partir de sa définition via le nombre de Nusselt, et d'en déduire le flux de chaleur échangé par convection.

Ces calculs sont moins directs que ceux liés aux transferts thermiques par conduction. Ils sont de plus davantage aléatoires, car ils dépendent fortement des relations fonctionnelles de départ qui sont retenues. La section suivante, consacrée à l'étude des couches limites visqueuse et thermique permet de calculer de manière analytique avec précision les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$ , dans un cas simple.

Exercices concernés par cette section : on peut citer les exercices suivants, 25, 26 et 27. Tous sont de niveau (A) et ils sont donc simples à résoudre. Ils s'appuient tous sur la notion des nombres caractéristiques (sans dimension) associés à la convection forcée, à savoir : le nombre de Nusselt, le nombre de Reynolds et le nombre de Prandtl.

## V. Théorie de la similitude, application aux couches limites

Pour un écoulement dans un tube de rayon  $R$ , les couches limites visqueuse et thermique représentent les zones où vitesse d'écoulement et température excédentaire passent l'une et l'autre de zéro en ( $x=0$ ), vers une valeur moyenne, soit  $U_0$  pour la vitesse d'écoulement, soit  $T_0 - T_\infty$  pour la température excédentaire. Pour traiter ce problème, il faut repartir des équations (3.19) et (3.20) pour lesquelles on note ici qu'il existe un terme prépondérant dans leurs premiers membres dans chacune d'entre elles :

$$V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2}, \text{ avec : } V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} \ll V_y \frac{\partial V_y}{\partial y}, \Rightarrow V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} \approx \nu \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2}, \quad (3.27)$$

$$V_x \frac{\partial T}{\partial x} + V_y \frac{\partial T}{\partial y} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \text{ avec : } V_x \frac{\partial T}{\partial x} \ll V_y \frac{\partial T}{\partial y}, \Rightarrow V_y \frac{\partial T}{\partial y} \approx \chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (3.28)$$

Les deux équations obtenues avec cette approximation, sont alors traitées sous forme de différences finies sur les épaisseurs de couche limites visqueuse (notée  $\delta$ ) et thermique (notée  $\delta'$ ). Commençons par l'équation du mouvement (3.27) :

$$V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} \approx \nu \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} \Rightarrow U_0 \frac{\Delta V}{\ell} \approx \nu \frac{\Delta V}{\delta^2} \Rightarrow \delta^2 \approx \frac{\nu \ell}{U_0} \approx \frac{\ell^2}{R_e}, \quad (3.29)$$

avec le nombre de Reynolds défini précédemment :  $R_e = \ell U \rho / \mu$ . Le résultat obtenu dans l'équation (3.29) indique que l'épaisseur de couche limite visqueuse  $\delta$  est donc proportionnelle à l'inverse de la racine carrée du nombre de Reynolds ( $\delta \approx \ell / \sqrt{R_e}$ ), où le paramètre  $\ell$  représente une longueur caractéristique, a priori arbitraire prise le long de la direction d'écoulement (ici le long de  $Oy$ ). Cette épaisseur de couche limite visqueuse correspond à la zone de transition pour le gradient de vitesse du fluide, passant d'une valeur nulle sur la paroi (en  $z = 0$  sur la Figure 3.3), à la valeur moyenne (notée  $v_\infty$  sur la Figure 3.3).

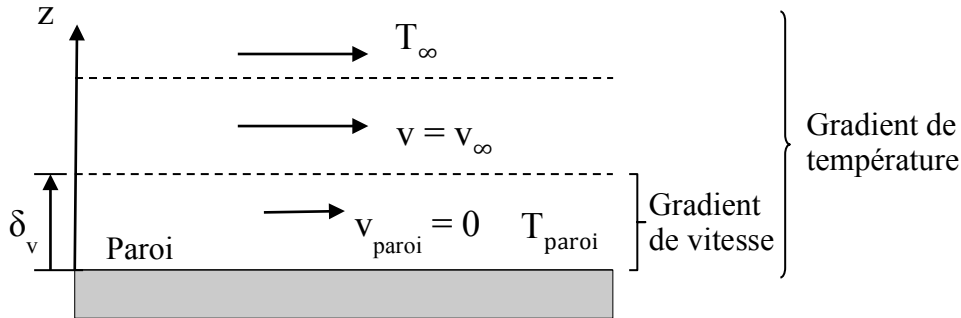


Figure 3.3 : Notion de couche limite visqueuse et thermique.

L'équation de la chaleur (3.28) est elle aussi traitée par différence finie sur l'épaisseur de couche limite thermique  $\delta'$ . Par contre, il faut ici faire attention car comme les deux épaisseurs de couches limites sont différentes ( $\delta' \neq \delta$ ), alors il faut en tenir compte, par une simple proportion, dans l'évaluation de la zone de transition pour la vitesse d'écoulement à l'intérieur de la couche limite thermique. En bref, on obtient :

$$V_y \frac{\partial T}{\partial y} \approx \chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Rightarrow U_0 \left( \frac{\delta'}{\delta} \right) \frac{\Delta T}{\ell} \approx \chi \frac{\Delta T}{\delta'^2} \Rightarrow \delta'^3 \approx \frac{\chi \delta \ell}{U_0} \quad (3.30)$$

Sachant que :  $\delta \approx \ell / \sqrt{R_e}$ , cf. Figure 3.4 pour le profil des vitesses sur l'épaisseur de couche limite visqueuse en régime laminaire, l'équation (3.30) est alors réécrite sous la forme :

$$\delta'^3 \approx \frac{\chi \delta \ell}{U_0} \cdot \frac{\ell}{\ell} \cdot \frac{v}{v} = \frac{\chi}{v} \cdot \frac{1}{R_e} \cdot \delta \ell^2 = \frac{\ell^3}{Pr R_e^{3/2}} \Rightarrow \delta' \approx \frac{\ell}{Pr^{1/3} R_e^{1/2}} \quad (3.31)$$

Dans ces expressions, le nombre de Prandtl est noté par sa définition :  $Pr = v / \chi = \mu C_p / \lambda$ .

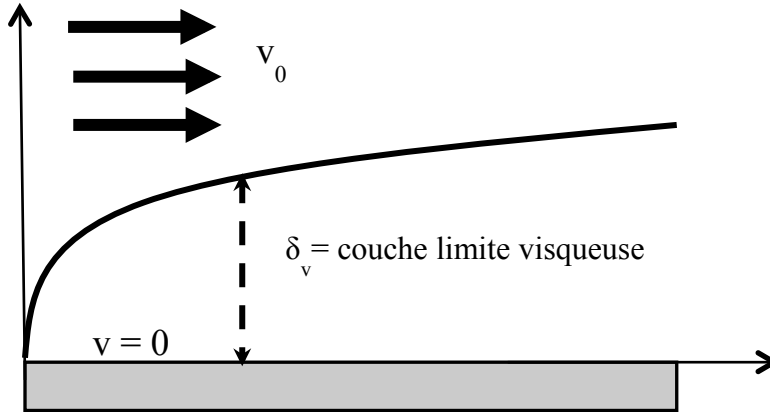


Figure 3.4 : Profil des vitesses sur l'épaisseur de couche limite visqueuse, pour un écoulement de type laminaire.

Pour terminer les calculs, il faut retourner au nombre de Nusselt, par le biais des équations définissant le flux de chaleur en conduction (loi de Fourier) et en convection (loi de Newton), écrites ici encore sous forme de différences finies. Pour cela, il faut évaluer le flux de chaleur radial (représenté par exemple le long de l'axe  $z$  sur la Figure 3.5). Sur l'épaisseur de couche limite thermique, l'écart de température s'écrit donc :  $\Delta T = T_s - T_\infty$ . Les expressions du flux de chaleur  $\phi$ , sont dès lors les suivantes :

$$|\phi| = \lambda S \frac{\Delta T}{\delta'} ; |\phi| = hS\Delta T \Rightarrow h \approx \frac{\lambda}{\delta'} \Rightarrow N_u = \frac{h\ell}{\lambda} \approx \frac{\ell}{\delta'} . \quad (3.32)$$

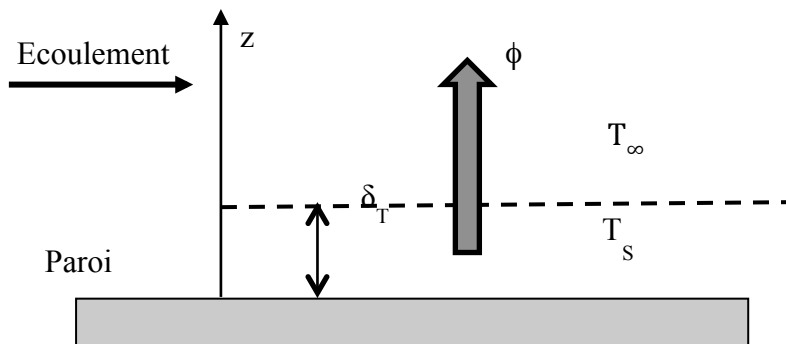
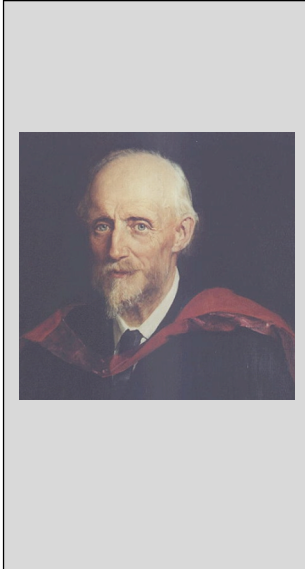


Figure 3.5 : Flux de chaleur radial, perpendiculaire à la direction de l'écoulement du fluide, évalué sur l'épaisseur de couche limite thermique.

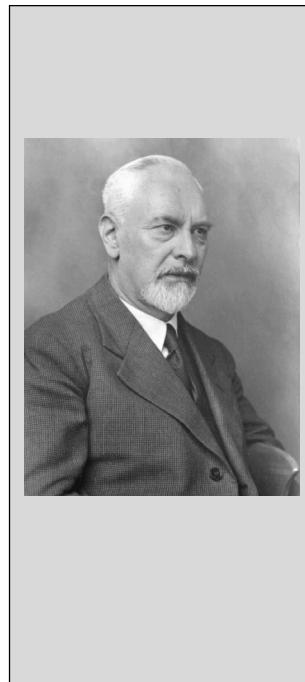
Cette dernière équation indique simplement que le nombre de Nusselt peut donc finalement se mettre sous la forme :

$$N_u \approx A \cdot P_r^{1/3} R_e^{1/2} . \quad (3.33)$$



#### ***Osborne Reynolds (1842-1912)***

Osborne Reynolds, ingénieur et physicien irlandais et britannique, né à Belfast et mort à Watchet en Angleterre, a effectué d'importants travaux en hydrodynamique et en mécanique des fluides. Sa contribution majeure sur le sujet est son très gros travail expérimental et théorique qui a permis d'introduire en 1883 le nombre de Reynolds. Il s'agit d'un paramètre sans dimension qui permet de prédire la transition entre régime d'écoulement laminaire et turbulent. Ce paramètre est fondamental dans divers domaines des sciences appliquées et de l'ingénierie, incluant mécanique des fluides, acoustique, et thermique de l'ingénieur. Il obtint en 1888, pour ses travaux, la médaille royale et il fut fait Lord de sa majesté. Il termina sa carrière comme professeur à l'Université de Manchester.



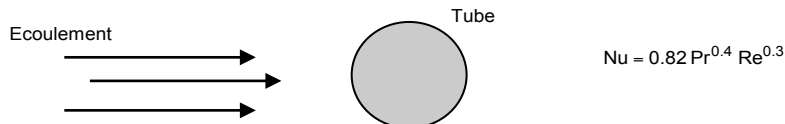
#### ***Ludwig Prandtl (1875-1953)***

Ludwig Prandtl, mathématicien et physicien allemand, né à Freising et mort à Göttingen, a effectué d'importants travaux en hydrodynamique, en mécanique des fluides et des solides. Une très importante contribution porte sur la notion des couches limites (visqueuse et thermique), centrale en hydrodynamique, en acoustique, et en thermique. Il a aussi laissé un nombre adimensionnel qui porte son nom, qui assure la liaison entre conductivité thermique et viscosité. Ce paramètre est fondamental, et il se retrouve dans beaucoup de relations fonctionnelles prédisant le flux thermique échangé par convection, en relation avec le nombre de Reynolds, cf. fiche bibliographique précédente. Il fit une très large partie de sa carrière à l'Université de Göttingen. Il s'intéressa aux applications aéronautiques à partir des années 1920. Il eut un rôle important dans ce domaine pendant la seconde guerre mondiale.

Ce résultat est très important. Il s'applique à un écoulement laminaire au dessus d'une plaque plane infinie. Il indique que le nombre de Nusselt est donc proportionnel à une constante, et qu'il dépend de la racine carrée du nombre de Reynolds, ainsi que de la

racine cubique du nombre de Prandtl (voir les encadrés de la page précédente pour des éléments bibliographiques sur Osborne Reynolds et Ludwig Prandtl). En fait, la constante  $A$ , pour cette configuration vaut 0,332. Pour d'autres configurations, il faudra utiliser d'autres valeurs de cette constante, ainsi que d'autres valeurs des exposants caractéristiques,  $\alpha$ ,  $\beta$ , de l'équation (3.26), cf. les deux dernières Tables A11 et A12 de l'Annexe pour des lois de variations du coefficient de Nusselt, à la fois en convection forcée, mais aussi en convection libre (voir à ce sujet la section suivante). La Figure 3.6 présente le cas classique de la convection forcée autour d'un tube cylindrique (en écoulement laminaire ou turbulent), avec des expressions différentes du nombre de Nusselt.

(a)



(b)

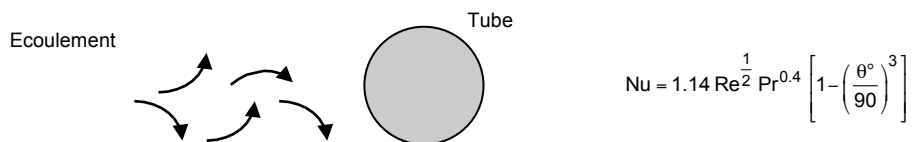


Figure 3.6 : Exemple de l'écoulement autour d'un tube, avec relation fonctionnelle proposée entre nombre de Nusselt, et nombres de Prandtl et de Reynolds : (a) cas d'un écoulement laminaire, et (b) cas d'un écoulement turbulent.

En présence d'écoulement turbulent, l'allure du profil de vitesse est assez différent, notamment il existe une position particulière pour laquelle la zone de turbulence débute. La Figure 3.7 illustre ce phénomène.

Les deux dernières Tables A11 et A12 de l'Annexe fournissent des résultats caractéristiques pour des écoulements laminaires ou turbulents dans différentes configurations. La relation générique pour un écoulement laminaire s'effectuant le long d'une paroi plane, fournit la classique relation :  $Nu = 0,332 Re^{1/2} Pr^{1/3}$ . En fait, le coefficient qui vaut 0,332 est déduit de l'expérience. Des calculs basés sur l'évolution d'un volume intégré, ou bien d'un volume élémentaire fournissent des résultats légèrement supérieurs, à savoir 0,4 ou bien 0,36 respectivement pour l'un ou l'autre de ces deux cas limites. D'autres résultats existent pour d'autres configurations. On peut citer par exemple le cas de la convection autour d'une sphère. Lorsque les phénomènes sont étudiés avec la sphère immergée dans un liquide avec un nombre de Reynolds

faible (compris entre 1 et 2000), alors la relation fonctionnelle s'écrit :  $Nu = (0,97 + 0,68 Re^{1/2}) Pr^{1/3}$ .

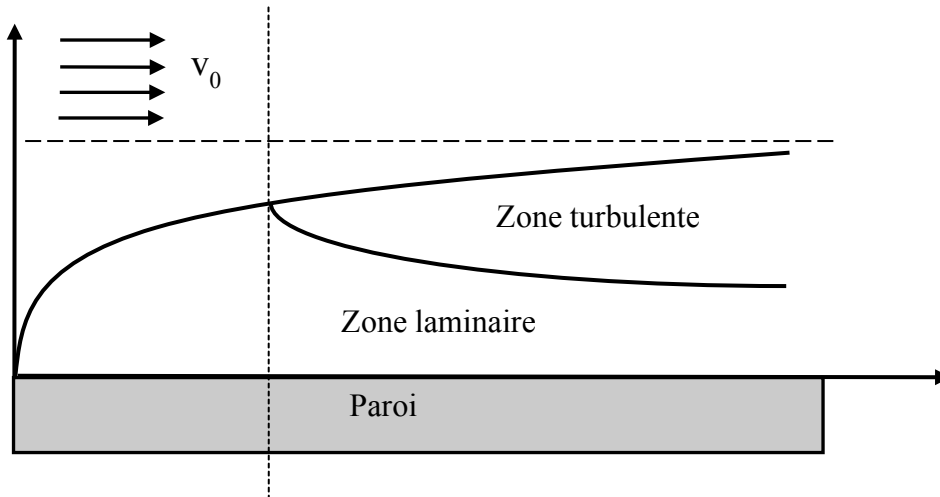


Figure 3.7 : Profil pour un écoulement turbulent, avec transformation de la couche limite visqueuse et transition du régime laminaire vers le régime turbulent.

Pour la même sphère plongée cette fois-ci dans un gaz avec un nombre de Reynolds encore plus faible (compris entre 1 et 25), alors il faut prendre :

$Nu = (2,22 + 0,48 Re^{1/2}) Pr$ . De nombreuses autres relations de ce type existent dans la littérature spécialisée pour des écoulements (laminaires ou turbulents) à la surface de plaques (ou d'échangeurs thermiques), autour de tubes ou de sphères, etc. Elles sont utilisées en fonction des configurations finalement retenues.

## VI. Equations fondamentales pour la convection libre

Pour étudier les équations fondamentales de la convection libre, en deux dimensions, il faut reprendre l'exemple décrit à la section 3.1 d'une plaque plane d'extension infinie le long de l'axe  $Oy$  (dans le sens de l'écoulement) et le long de l'axe  $Oz$  (perpendiculaire au plan de la Figure). Au contact de la plaque, il peut exister des points de décollement de la couche limite visqueuse, ce qui permet de construire une cellule de convection qui se développe le long de l'axe  $Ox$ . L'équation de la chaleur « généralisée » (3.28) reste inchangée, alors qu'il faut ajouter un nouveau terme dans l'équation du mouvement (3.27), cf. Figure 3.8 pour un schéma de principe. Ce terme correspond à la force ascensionnelle (ou force d'Archimède) due au gradient de température au sein du fluide en mouvement, et au coefficient de dilatation isobare :  $\alpha = (1/V)(\partial V / \partial T)_{p=cte}$  (ici  $V$  note le volume et non pas la vitesse qui est elle le plus souvent indexée par une direction).



Cette force s'écrit au final :  $\alpha\rho g(T - T_0)$ , avec  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ , si bien que les équations fondamentales de la convection libre (ici à deux dimensions) se mettent sous la forme :

$$\rho \left( V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} \right) = \mu \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \alpha\rho g(T - T_0), \quad (3.34)$$

$$\rho C_p \left( V_x \frac{\partial T}{\partial x} + V_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (3.35)$$

Au passage, en convection forcée, le couplage entre champ de vitesse et champ de température apparaissait directement dans l'équation de la chaleur (par exemple sous sa forme compacte, cf. équation (3.18) :

$$\lambda \left( \partial^2 T / \partial x^2 \right) = \rho C_p \left( \vec{V} \cdot \vec{\nabla} T \right) = \rho C_p \vec{V} \cdot \overline{\text{grad } T},$$

mais pas dans l'équation du mouvement. Ici, une différence notable est bien que les deux champs sont intimement mélangés dans les deux équations, incluant l'équation du mouvement (3.34).

La résolution exacte des équations (3.34) et (3.35) est très difficile, et par exemple la prédiction des cellules de convection n'est pas du tout évidente. De nouveau, ces deux équations aux dérivées partielles sont couplées, et elles sont non linéaires.

Une question que l'on peut se poser est de connaître la relation fonctionnelle existante entre le nombre de Nusselt et d'autres nombres caractéristiques (sans dimension) tels que le nombre de Reynolds et le nombre de Prandtl, comme établi en convection forcée. Dans le cas présent de la convection libre, il n'y a pas forcément d'écoulement d'ensemble du fluide, bien établi, et il n'est donc pas bien évident qu'il faille utiliser le nombre de Reynolds. Par ailleurs, avec l'introduction dans l'équation du mouvement du terme de force ascensionnelle,  $\alpha\rho g(T - T_0)$ , de nouvelles grandeurs apparaissent. Il est certainement pertinent ici de faire une analyse dimensionnelle des nouvelles équations, dans le cadre de la théorie de la similitude. En fait, nous allons nous concentrer sur l'équation du mouvement (3.34), en notant que l'équation aux dimensions s'écrit :

$$\left[ \rho V_x \frac{V_y}{\ell} \right] = \left[ \mu \frac{V_y}{\ell^2} \right] = [\alpha\rho g \Delta T]. \quad (3.36)$$

Commençons par évaluer les deux premiers termes :

$$\left[ \rho V_x \frac{V_y}{\ell} \right] = \left[ \mu \frac{V_y}{\ell^2} \right] \Rightarrow [\rho V_x] = \left[ \frac{\mu}{\ell} \right] \Rightarrow \left[ \frac{\rho V_x \ell}{\mu} \right] = 1. \quad (3.37)$$

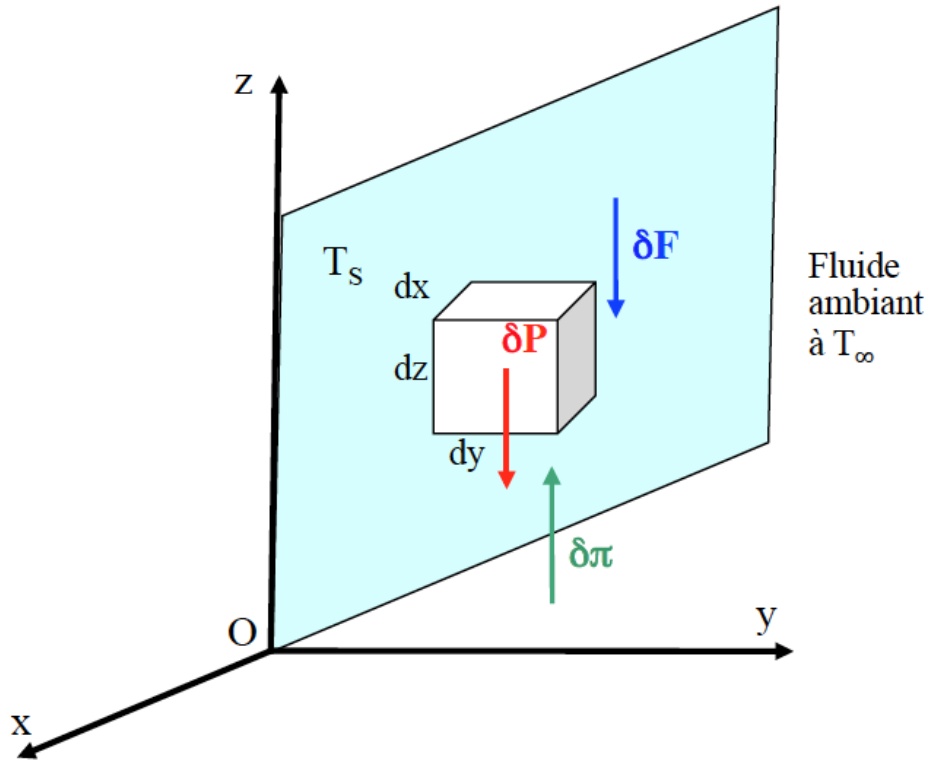


Figure 3.8 : Mise en équilibre d'un élément représentatif du fluide avec notamment les forces de pesanteur  $\delta P$ , celle de frottement avec la paroi  $\delta F$ , ainsi que la force ascensionnelle (ou force d'Archimède)  $\delta \pi$ .

Cette équation exprime simplement la conservation du nombre de Reynolds pour deux états semblables, qui est donc bien sans unité (puisque la dimension vaut l'unité).

Si l'on évalue maintenant les deux derniers termes de l'équation (3.36), on obtient :

$$\left[ \mu \frac{V_y}{\ell^2} \right] = [\alpha \rho g \Delta T] \Rightarrow \left[ \frac{\alpha \rho g \Delta T \ell^2}{\mu V_y} \right] = 1, \quad (3.38)$$

soit en ayant noté que :  $[V_x] = [\mu / \rho \ell]$ , on obtient finalement le résultat suivant :

$$\left[ \frac{\alpha \rho^2 g \Delta T \ell^3}{\mu^2} \right] = 1. \quad (3.39)$$

Nous avons ainsi défini un nouveau nombre caractéristique sans dimension. Il s'agit du nombre de Grashof. C'est lui, à la place du nombre de Reynolds qui vient gérer la convection libre. Les relations fonctionnelles entre nombre de Nusselt, nombre de

Grashof et nombre de Prandtl s'écrivent toutes sous une forme voisine de l'équation (3.26) correspondante en convection forcée, à savoir :

$$N_u \approx A' \cdot Pr^{\alpha'} G_r^{\beta'}. \quad (3.40)$$

Dans le cas présent, en convection libre le nombre de Grashof est simplement venu remplacer le nombre de Reynolds. De plus, il faut noter que les deux exposants sont systématiquement identiques ( $\alpha' = \beta'$ ). On trouvera des valeurs numériques pour différentes configurations dans la dernière Table A12 de l'Annexe, à ce sujet. La turbulence peut parfois être observée en convection libre. On peut voir par exemple, dans certaines conditions, des volutes (voire des instabilités) au sein d'un liquide s'installer lorsque une plaque chauffante est utilisée pour venir le réchauffer. Ces phénomènes se produisent pour de fortes valeurs du nombre de Grashof, typiquement supérieures à 50 000.

Pour terminer cette section, notons qu'il est parfois possible d'introduire un autre nombre sans dimension, le nombre de Rayleigh, qui est simplement le produit du nombre de Prandtl avec le nombre de Grashof :  $Ra = Pr Gr$ . Des relations fonctionnelles simples entre le nombre de Nusselt et le nombre de Rayleigh, ont été proposées, sous la forme ;  $N_u = A Ra^n$ . On trouvera quelques unes de ces expressions dans le tableau 3.2, avec les amplitudes  $A$  et les exposants  $n$  du nombre de Rayleigh.

Tableau 3.2	$A$	$n$
$10^{-3} < Ra < 5 \cdot 10^2$	1.18	1/8
$5 \cdot 10^2 < Ra < 2 \cdot 10^7$	0.54	1/4
$2 \cdot 10^7 < Ra < 10^{13}$	0.135	1/3

Lord Rayleigh (voir encadré à la fin du chapitre), prix Nobel de physique de 1902 est très connu pour ses nombreux travaux pionniers en acoustique et vibrations, cf. son ouvrage en deux volumes « *The theory of sound* » (1877). Il est intéressant de noter qu'il a donc laissé son nom aussi indirectement en thermique.

Exercice concerné par cette section : il n'y en a qu'un seul, c'est l'exercice 28 portant sur la convection libre et forcée d'une lampe ordinaire. En fait, il s'agit pour l'essentiel d'une simple application numérique pour les deux configurations (en convection forcée, puis en convection libre).

## VII. Transferts thermiques pour un fluide en écoulement dans un tuyau

Il s'agit d'une configuration générique. L'eau pénètre dans le tuyau à la température  $T_i$ , et elle ressort à la température  $T_o$ . La conduite est chauffée en surface, ce qui produit un flux de chaleur vers le fluide,  $\phi = hS(T_s - T_{eau})$ , qui est disponible pour venir réchauffer le fluide en écoulement (cf. Figure 3.9 pour les notations).

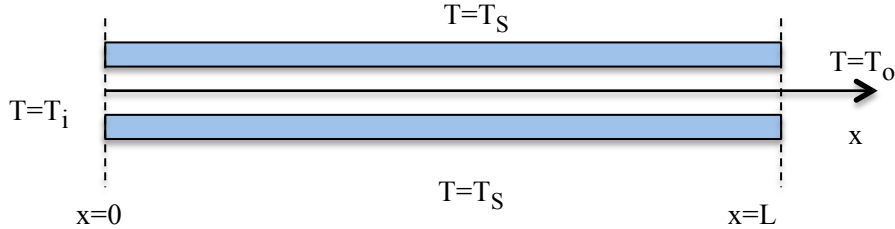


Figure 3.9 : Configuration pour l'écoulement d'un fluide dans une conduite réchauffée en surface.

Il suffit alors d'écrire un bilan thermique général, en utilisant la loi fondamentale de la calorimétrie pour évaluer la quantité de chaleur nécessaire pour réchauffer le fluide. Ce bilan thermique peut être écrit sous forme d'une différence finie, et alors une procédure itérative est nécessaire pour résoudre numériquement le problème. Il est aussi possible d'écrire à la place un bilan sous forme infinitésimale pour une couche de fluide d'épaisseur  $dx$  (où  $Ox$  indique la direction de l'écoulement du fluide dans le tuyau), cf. calculs menés dans l'exercice 29. Si l'on se limite ici au cas du bilan thermique global écrit par différence finie sur toute la longueur du tuyau, il faut écrire :

$$\phi = h\pi dL(T_s - T_{eau}) = \dot{m}C_p(T_o - T_i), \text{ avec : } T_{eau} = \frac{1}{2}(T_o + T_i); \dot{m} = \rho U \frac{\pi}{4} d^2, \quad (3.41)$$

équation qui est réécrite sous une forme plus compacte :

$$hL\left(T_s - \frac{1}{2}(T_o + T_i)\right) = \rho U \frac{d}{4} C_p (T_o - T_i), \quad (3.42)$$

permettant finalement d'obtenir une expression « formelle » du résultat, sous la forme suivante :

$$T_o = \left\{ hLT_s + \left( \rho U \frac{d}{4} C_p - \frac{hL}{2} \right) T_i \right\} / \left( \rho U \frac{d}{4} C_p + \frac{hL}{2} \right). \quad (3.43)$$

Bien évidemment, ce résultat ne peut pas fournir directement la valeur de la température  $T_o$  de sortie du fluide de la conduite. En effet, pour calculer la conductance  $h$ , il faut utiliser le nombre de Nusselt, qui lui-même fait intervenir le nombre de Reynolds et le nombre de Prandtl. Dit en d'autres termes, l'équation (3.43) fait intervenir de nombreux paramètres physiques ( $h, \rho, C_p, \mu, P_r$ ), qui dépendent tous de la température (voir les Tables A1 et A2 de l'Annexe pour les valeurs de ces paramètres pour l'eau et pour

l'air). Dès lors, il faut utiliser une procédure itérative. Ceci étant dans le cas d'espèce qui nous intéresse ici, on peut constater en effectuant les applications numériques pour ce type de problème que la convergence est assurée pratiquement au bout de quelques (2 ou 3 maximum) itérations. De nouveau, une équation de bilan thermique analogue à l'équation (3.41), mais écrite sous forme différentielle pour une couche de fluide d'épaisseur  $dx$ , permet aussi de résoudre ce problème de manière expéditive et davantage rigoureuse (sans avoir à ressortir à une procédure itérative). C'est d'ailleurs exactement ce qui est proposé dans l'exercice 29.

Exercices concernés par cette section : les exercices 29 et 30 portent sur le champ de température moyen pour le fluide circulant dans une conduite chauffée en surface, ou bien sur le refroidissement d'une pompe industrielle.

## VIII. Transferts thermiques pour un barreau immergé dans un fluide

La configuration de base est fournie sur la Figure 3.10. Un barreau cylindrique de rayon  $R$  et de longueur  $L$  est encastré entre deux murs épais qui jouent le rôle de thermostats, c'est-à-dire que leurs températures sont supposées constantes, par exemple  $T_1$  pour l'un et  $T_2$  pour l'autre (avec  $T_2 > T_1$ ), ou bien toutes autres températures de référence, mais qui restent a priori fixes. Un flux de chaleur s'écoule donc dans le barreau en partant du mur le plus chaud, en direction du mur le plus froid. De plus, le barreau peut aussi échanger de la chaleur par convection avec le fluide qui l'entoure. Il faut ici aussi partir d'une équation de bilan thermique pour une tranche  $dx$  du barreau qui s'écrit en considérant que le flux de chaleur qui pénètre en  $x=x$ , est égal à ce qui ressort en  $x=x+dx$ , modifié par le flux de chaleur ayant pénétré par convection vers le fluide sur la surface  $dS' = Pdx$  de la section infinitésimale concernée du tube. On peut donc écrire (voir aussi la section suivante sur la thermique des ailettes) ce bilan sous forme différentielle :

$$-\lambda S \frac{dT(x)}{dx} = -\lambda S \frac{dT(x+dx)}{dx} + hPdx(T - T_\infty), \quad (3.44)$$

avec  $P$  : périmètre du tube, ce qui permet d'aboutir à l'équation différentielle générique pour ce type de problème qui est mise sous la forme suivante :

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{hP}{\lambda S}(T - T_\infty) = 0. \quad (3.45)$$

Soit en posant :  $\theta(x) = T(x) - T_\infty$ , et en notant :  $m^2 = hP / \lambda S$ , on obtient finalement l'expression classique :

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0. \quad (3.46)$$

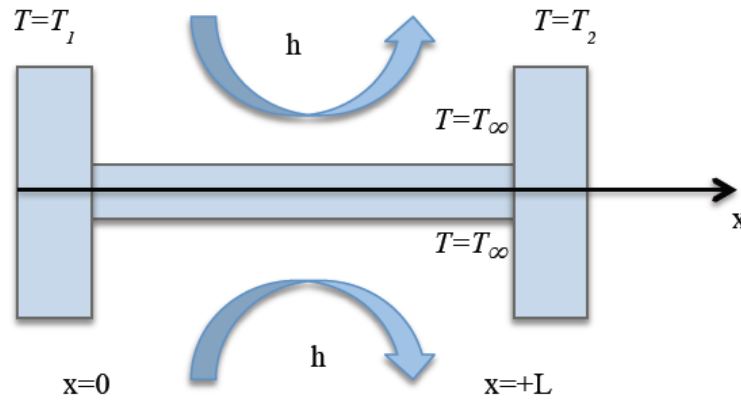


Figure 3.10 : Barreau cylindrique encastré entre deux murs, vu comme des thermostats de températures  $T_1$  et  $T_2$ . Un flux de chaleur est évacué par convection avec le fluide environnant.

Cette équation différentielle du second ordre à coefficient constant, admet des solutions qui peuvent indifféremment s'écrire sous l'une ou l'autre des deux formes suivantes :

$$\theta(x) = A \exp(+mx) + B \exp(-mx), \quad (3.47)$$

$$\theta(x) = A' \sinh(+mx) + B' \cosh(-mx). \quad (3.48)$$

Les constantes  $A$ ,  $B$ ,  $A'$ ,  $B'$ , sont alors déterminées par les conditions aux limites aux deux extrémités du barreau. Il s'agit d'un problème bien posé puisque a priori il y a deux inconnues pour deux conditions limites.

Exercices concernés par cette section : on peut citer les exercices 35, 36, 39 & 40 qui portent sur les transferts de chaleur dans un barreau simple, ou bien composite, sur la manipulation des objets dans un four, ou bien sur l'optimisation d'un système de chauffage. Il s'agit de petits exercices du niveau B (moyen) ou bien C (avancé), qui restent accessibles.

## IX. Application à la thermique des ailettes (planes, cylindriques)

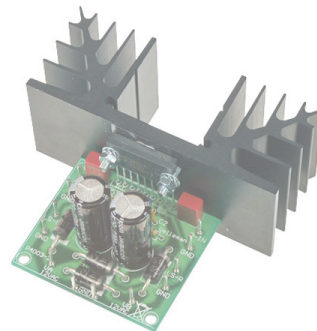
Une classe d'applications très importante concerne l'utilisation de surfaces auxiliaires ou ailettes. Ici l'on ne cherche pas à isoler thermiquement, mais l'objectif est au contraire d'augmenter le transfert de chaleur, le refroidissement de l'ailette (par exemple cas des radiateurs pour le chauffage central) étant assuré par un mécanisme convectif avec l'air environnant qui récupère le flux de chaleur cédé par les ailettes du radiateur. Il existe de très nombreuses configurations très différentes. On peut citer par

exemple les cas suivants : ailettes pour le refroidissement des moteurs, pour les applications en informatique et en micro-électronique cf. Figure 3.11), échangeurs thermiques dans les centrales électriques, radiateurs pour tous les systèmes individuels ou collectifs de chauffage, etc. Les ailettes peuvent se présenter sous de multiples formes et géométries selon les applications visées. De même, elles peuvent être fixées à la surface mère de différentes manières, et être placées dans des milieux fluides de natures variables.

Dans le cadre des rappels de cours présentés ici, nous nous limiterons à quelques configurations essentielles, dont la plus élémentaire reste celle de la géométrie plane. Pour le cas d'une ailette plane, les calculs sont à fait similaires à ceux de la section précédente pour la thermique d'un barreau conducteur encastré, à ceci près que la géométrie est différente, ainsi que les conditions aux limites pour l'extrémité libre, qui devront être discutées en grand détail. Il faut commencer par écrire l'équation de bilan thermique, voir la Figure 3.12 pour la géométrie et les notations retenues. Il existe un certain nombre d'hypothèses de base pour traiter ce problème. On suppose que le régime thermique est permanent. Par ailleurs, la longueur  $L$  de l'ailette est prise grande devant son épaisseur  $e$ .



(a)



(b)

*Figure 3.11 : Exemples de radiateurs utilisés en micro-électronique et en informatique pour le refroidissement de pièces soumises à des échauffements importants : (a) différents radiateurs ; (b) radiateur d'un amplificateur de puissance (photos empruntées sur des sites d'électronique grand public).*

Au passage, cette hypothèse implique que la température est uniforme sur la section de l'ailette, et qu'elle n'est donc en conséquence qu'une fonction de la coordonnée spatiale  $x$  (cf. Figure 3.12). Cela signifie donc qu'une simple modélisation à une dimension (le long de l'axe  $Ox$ , c'est-à-dire suivant sa longueur) sera suffisante. Il existe d'autres hypothèses implicites ou pas qui sont listées ici :

- ailette constituée d'un matériau homogène et isotrope ;
- conductivité  $\lambda$ , épaisseur  $e$  et section  $S = \ell e$  de l'ailette constante ;
- conductance thermique  $h$  du fluide ambiant ainsi que sa température  $T_\infty$  connues ;
- paroi mère où l'ailette est montée possédant une température de surface  $T_0$  constante ;
- absence de source de chaleur interne (dans l'ailette ou bien dans la paroi) ;
- effets de bord et de contacts négligeables.

Pour une tranche de l'ailette de longueur infinitésimale  $dx$ , prise le long de l'axe  $Ox$ , le bilan thermique s'écrit simplement en indiquant que le flux entrant en  $x=x$  est égal au flux sortant en  $x=x+dx$  auquel il faut ajouter le flux de chaleur perdu par convection (en évaluant correctement la surface d'échange en contact avec l'air environnant de la tranche d'épaisseur  $dx$ , soit ici  $Pdx$ , où  $P$  désigne le périmètre de l'ailette parallélépipédique). Au final, le bilan peut se mettre sous la forme suivante (à la fois sur les quantités de chaleur échangées, ou bien sur les flux thermiques associés) :

$$q_x = q_{x+dx} + q_{convection} \Rightarrow \phi_x = \phi_{x+dx} + \phi_{convection} .$$

Il faut alors faire appel à la loi de Fourier pour la conduction à l'intérieur de l'ailette, ainsi qu'à la loi de Newton pour la convection, ce qui permet d'écrire finalement :

$$-\lambda S \frac{dT}{dx} \Big|_{x=x} = -\lambda S \frac{dT}{dx} \Big|_{x=x+dx} + hPdx(T - T_\infty) . \quad (3.49)$$

Il ne reste plus qu'à utiliser le théorème des accroissements finis pour pouvoir écrire finalement :

$$-\lambda S \frac{dT}{dx} = -\lambda S \left( \frac{dT}{dx} + \frac{d^2T}{dx^2} dx \right) + hPdx(T - T_\infty) \Rightarrow \frac{d^2T}{dx^2} - \frac{hP}{\lambda S} (T - T_\infty) = 0 . \quad (3.50)$$

Soit avec le changement de variable :  $\theta(x) = T(x) - T_\infty$ , et en notant ,  $\beta^2 = hP / \lambda S = 2h / \lambda e$  :

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - \beta^2\theta = 0 . \quad (3.51)$$

Il s'agit d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants, admettant une solution sous la forme, par exemple écrite ici :  $\theta(x) = A \exp(+\beta x) + B \exp(-\beta x)$ , cf. résultat de la section précédente. Il ne reste plus alors qu'à déterminer les coefficients  $A$  et  $B$ , en utilisant les conditions aux limites. Nous allons discuter plusieurs cas différents.



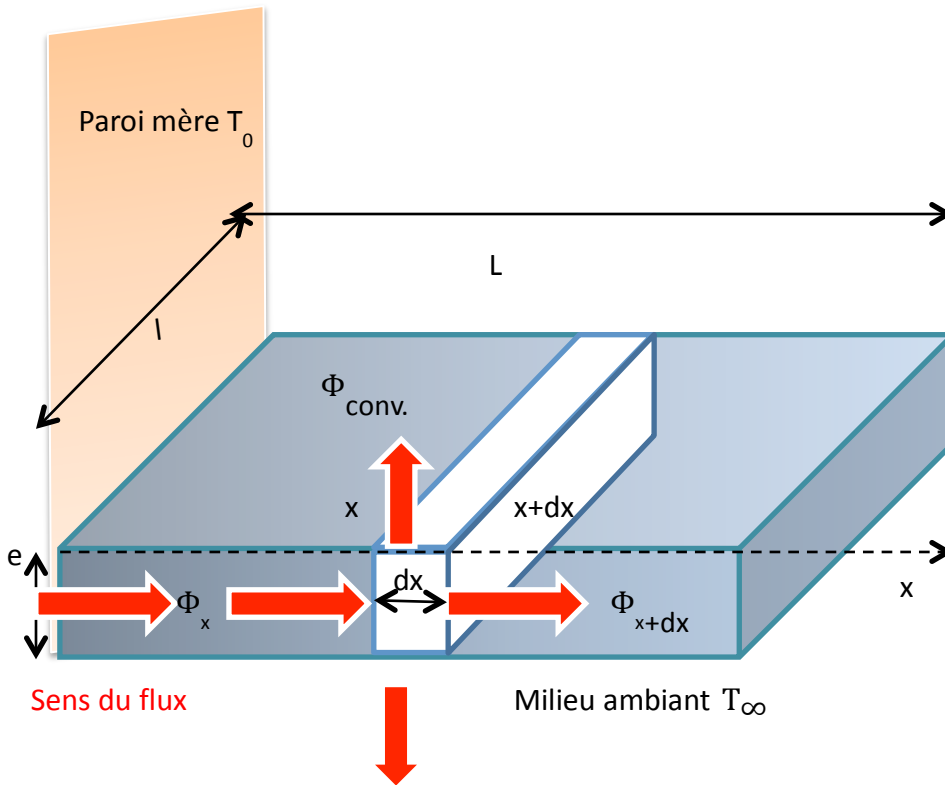


Figure 3.12 : Géométrie et notations pour l'ailette plane utilisée dans la modélisation.

- Cas d'une ailette infinie (ou du moins très longue)  
C'est le cas trivial pour lequel les résultats sont les plus simples. En effet, la condition limite à l'extrémité est simplement de noter que :  $\theta \rightarrow 0 \Rightarrow T \rightarrow T_\infty$ . En outre, pour la base de l'ailette,  $\theta \rightarrow \theta_0 \Rightarrow T \rightarrow T_0$ . Dès lors,  $A=0$ , et  $B=\theta_0$ . Dans ce cas, il ne reste plus qu'un seul terme de la solution, et la répartition des températures le long de l'ailette est une simple exponentielle décroissante le long de son axe  $Ox$ , qui s'écrit finalement :

$$\theta(x) = \theta_0 \exp(-\beta x) \Rightarrow T(x) = T_\infty + (T_0 - T_\infty) \exp(-\beta x). \quad (3.52)$$

Dans ce cas, le flux de chaleur échangé avec la paroi mère s'écrit :

$$\phi = -\lambda S \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = \lambda S \beta \theta_0. \quad (3.53)$$

- Cas d'une ailette de longueur finie isolée thermiquement à son extrémité  
Si l'on cherche à optimiser la forme de l'ailette, il faut rechercher l'obtention d'une configuration pour laquelle le flux de chaleur à son extrémité soit le plus faible possible, à la limite qu'il soit nul, ce qui indique alors que toute la chaleur a été évacuée sur le pourtour de l'ailette. C'est ce second cas limite

que nous étudions maintenant. Pour ce faire, il est très utile d'écrire les solutions de l'équation (3.51), non plus à l'aide de fonctions exponentielles, mais à la place en utilisant les fonctions hyperboliques  $\sinh(\beta x)$  et  $\cosh(\beta x)$ , sous la forme :

$$\theta(x) = M \sinh(\beta x) + N \cosh(\beta x). \quad (3.54)$$

Ici encore, il faut déterminer les constantes  $M$  et  $N$ , en utilisant les conditions aux limites. Celle de la base de l'ailette (en  $x=0$ ) reste inchangée :  $\theta \rightarrow \theta_0 \Rightarrow T \rightarrow T_0$ , soit  $N = \theta_0$ . Si l'ailette n'évacue aucune quantité de chaleur à son extrémité (en  $x = +L$ ), alors :

$$\phi = -\lambda S \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=L} = 0, \text{ avec : } \frac{dT}{dx} = M\beta \cosh(\beta x) + \theta_0 \beta \sinh(\beta x), \quad (3.55)$$

d'où :

$$M\beta \cosh(\beta L) + \theta_0 \beta \sinh(\beta L) \Rightarrow M = -\theta_0 \tanh(\beta L). \quad (3.56)$$

Au final, il reste donc :

$$\theta(x) = \theta_0 \{-\tanh(\beta L) \sinh(\beta x) + \cosh(\beta x)\} = \theta_0 \cosh(\beta(L-x)) / \cosh(\beta L). \quad (3.57)$$

Les profils de température réduits  $\theta(x)/\theta_0$  obtenus sont tracés sur la Figure 3.13, en fonction de la distance réduite  $x/L$  le long de l'ailette, suivant différentes valeurs du paramètre  $\beta L$ . Rappelons que  $\beta = \sqrt{2h/\lambda\ell}$ , cette grandeur est donc liée au coefficient de convection  $h$ , à la conductivité thermique  $\lambda$ , et à la largeur de l'ailette  $\ell$ .

Ces résultats indiquent que le rapport  $\theta(x)/\theta_0$  diminue rapidement lorsque le paramètre  $\beta L$  est grand, ce qui correspond à une ailette longue et large à la fois, présentant donc une grande surface d'échange. Dans le même temps, il est aussi favorable que le coefficient de conductance du milieu ambiant soit élevé, ce qui renforce d'autant l'évacuation de la chaleur. Pour des valeurs faibles du paramètre  $\beta L$ , à la limite lorsque  $\beta L \ll 1$ , alors l'équation (3.57) indique que le rapport  $\theta(x)/\theta_0$  est voisin de 1, ce qui correspond ici au cas où très peu de chaleur est finalement évacuée.

Il est possible de retrouver ce résultat en exprimant le flux de chaleur évacué à la base de l'ailette. On obtient finalement :

$$\phi = -\lambda S \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = \lambda S \beta \theta_0 \tanh(\beta L). \quad (3.58)$$

Les résultats obtenus, à la fois en termes de profils de température, ou bien pour le flux échangé avec la base de l'ailette, sont bien entendu compatibles avec ceux des deux cas limites d'une ailette très longue ou bien au contraire très courte. Il suffit en effet de faire tendre la longueur de l'ailette vers l'infini (ou bien vers zéro) pour les retrouver.

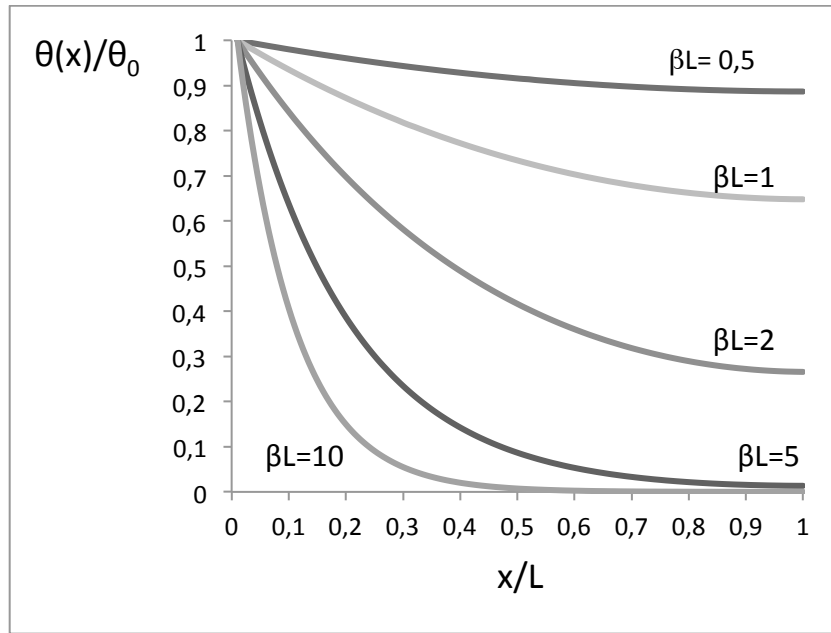


Figure 3.13 : Tracé des profils de température réduits  $\theta(x)/\theta_0$ , obtenus à partir de l'équation (3.57), en fonction de la coordonnée réduite le long de l'ailette  $x/L$ , pour diverses valeurs du paramètre  $\beta L$ .

Dans le cas général, pour une ailette de longueur finie n'admettant pas d'être thermiquement isolée à son extrémité, les calculs et les résultats précédents peuvent se généraliser. On obtient finalement les résultats suivants :

$$\theta(x) = \theta_0 \left\{ \frac{\cosh(\beta(L-x)) + u \sinh(\beta(L-x))}{\cosh(\beta L) + u \sinh(\beta L)} \right\}, \quad (3.59)$$

$$\text{et } \phi = \lambda S \beta \theta_0 \left\{ \frac{\sinh(\beta L) + u \cosh(\beta L)}{\cosh(\beta L) + u \sinh(\beta L)} \right\}, \quad (3.60)$$

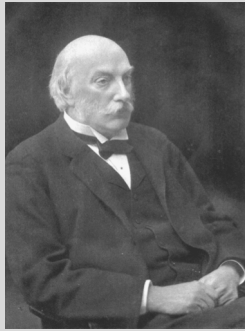
avec :  $u = h / \lambda \beta = \sqrt{he / 2\lambda} = \sqrt{\text{Biot}}$ . Le fait de retrouver ici le nombre de Biot (pour un échangeur thermique d'épaisseur  $e$ ) n'a pas de quoi surprendre puisque les phénomènes étudiés sont en permanence reliés à l'équilibre des échanges thermiques entre conduction et convection, d'où la présence du nombre de Biot, ou alternativement de celle du nombre de Nusselt.

Il est possible aussi d'effectuer un dernier point sur l'efficacité  $\varphi$  d'une ailette. Par définition, il s'agit du quotient du flux de chaleur quittant la base de l'ailette par rapport au même flux en absence de l'ailette. Pour le cas de l'ailette isolée thermiquement à son extrémité, il faudrait écrire :

$$\varphi = \frac{\lambda S \beta \theta_0 \tanh(\beta L)}{h S' \theta_0} = \{ \tanh(\beta L) \} / \beta L. \quad (3.61)$$

Lorsque le produit  $\beta L$  est petit, alors le paramètre d'efficacité tend vers 1, puisque  $\tanh(\beta L) \approx \beta L$ , lorsque  $\beta L \rightarrow 0$ . Ce résultat est tout à fait normal puisque lorsque  $\beta L \rightarrow 0$ , la Figure 3.13 indique que  $\theta/\theta_0 \rightarrow 1$ , si bien que toute l'ailette se retrouve à la température  $T_0$  de la paroi mère (ou bien celle de la base de l'ailette).

Exercices concernés par cette section : on peut citer les exercices 37 et 38 qui portent respectivement sur les transferts de chaleur dans une ailette plane, ou bien dans une ailette cylindrique. Par rapport à la section précédente qui portait sur les transferts de chaleur dans un barreau maintenu entre deux murs jouant le rôle de thermostats, pour la théorie des ailettes, les conditions aux limites pour l'extrémité libre sont différentes, ce qui aboutit à des solutions spécifiques.



#### ***John William Strutt Rayleigh (1842-1919)***

John William Strutt Rayleigh (ou Lord Rayleigh) est un mathématicien et physicien anglais, prix Nobel de physique en 1904, pour sa découverte conjointe de l'argon avec Ramsay qui obtint de son côté le prix en chimie. Eduqué au Trinity College à Cambridge, c'est là qu'il fera toute sa carrière, après quelques années qu'il passa à voyager aux Etats-Unis et à travers l'Europe. C'est en 1879 qu'il accepte la place laissée vacante au laboratoire Cavendish de Cambridge, suite au décès de Maxwell. Esprit universel, ses contributions en physique sont très larges, incluant l'électromagnétisme, l'optique, l'élasticité, la thermique, mais c'est surtout en acoustique et en science des vibrations qu'il laissa une empreinte majeure, notamment en publiant en 1877, son fameux traité en deux volumes sur la « *Théorie du son* » qui fera autorité dans le domaine pendant de nombreuses décennies, et qui peut encore aujourd'hui être lu avec grand profit du fait de sa modernité et de son étendue.